ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω V 2-διάστατος δ.χ με εσωτερικό γινόμενο $<,>$ και $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2\}$ του V ώστε:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1 \text{ και } Ae_2 = \lambda_2 e_2$$

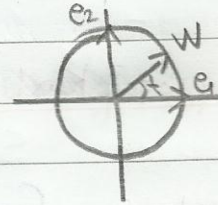
όπου $\lambda_1 = \max\{Q_A(w) \mid w \in V, \|w\| = 1\}$

$\lambda_2 = \min\{Q_A(w \mid w \in V, \|w\| = 1\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $e \in V$, $\|e\| = 1$ ώστε $Q_A(e) = \max\{Q_A(w) / \|w\| = 1\}$

Θεωρώ βάση $\{e_1 = e, e_2\}$



$w = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2$, $\|w\| = 1$

Θεωρώ την $f(t) = Q_A((\cos t)e_1 + (\sin t)e_2)$

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο $t = 0$.

$f(t) = <A((\cos t)e_1 + (\sin t)e_2), (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2> =$

$= \cos^2 t <Ae_1, e_1> + 2\cos t \sin t <Ae_1, e_2> + \sin^2 t <Ae_2, e_2> \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = \cos^2 t\, \varphi_A(e_1) + 2\sin t \cos t <Ae_1, e_2> + \sin^2 t\, \varphi_A(e_2)$

$f'(0) = 0 \Rightarrow <Ae_1, e_2> = 0$, όπου $Ae_1 = <Ae_1, e_1>e_1 + \cancel{<Ae_1, e_2>e_2} =$

$= \lambda_1 e_1$, και $Ae_2 = <Ae_2, e_1>e_1 + <Ae_2, e_2>e_2 =$

$= <e_2, Ae_1>e_1 + \varphi_A(e_2)e_2 \Rightarrow Ae_2 = \varphi_A(e_2)e_2$, e_2 ιδιοδιάνυσμα και ιδιοτιμή $\lambda_2 = \varphi_A(e_2)$

$w \in V$ $\|w\| = 1$ ώστε $w = xe_1 + ye_2$

$\varphi_A(w) = x^2 \varphi_A(e_1) + y^2 \varphi_A(e_2) = x^2\lambda_1 + y^2\lambda_2 \geq x^2\lambda_2 + y^2\lambda_2 = \cancelto{1}{(x^2+y^2)}\lambda_2 = \lambda_2$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$. Τότε υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$ του T_pS ώστε $L_p e_1(p) = k_1(p)\, e_1(p)$ και $L_p e_2(p) = k_2(p)\, e_2(p)$.
Τα διανύσματα $e_1(p), e_2(p)$ καλούνται κύριες διευθύνσεις στο p (είναι τα ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten)

Πχ
1) Επίπεδο: $L_p = 0$, $\mathrm{II}_p = 0$, $k_1 = k_2 = 0$, άπειρες κυρ. διευθύνσεις
2) Σφαίρα: $L_p = \frac{1}{R} \cdot Id$, $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$, κυρ διευθ. όλα τα εφαπτ. διανύσμ. $-\{0\}$
3) Κύλινδρος: $L_p e_1 = \frac{1}{r} e_1$, $L e_2 = 0$, $k_1 = \frac{1}{r}$, $k_2 = 0$,
διευθ. στον εφαπτ. κύκλο   διευθ. στον άξονα z

Οι κύριες καμπυλότητες είναι οι κύριες ιδιοτιμές της απεικόνισης Weingarten.

ΠΡΟΤΑΣΗ (ΤΥΠΟΣ EULER)
$p \in S$ $\{e_1(p), e_2(p)\}$ κύριες διευθύνσεις με αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες $k_1(p) \geq k_2(p)$. Τότε $\forall\, w \in T_pS$ $\|w\| = 1$ ισχύει $k_n(w) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$
όπου $\theta = (\widehat{w, e_1(p)})$, $w = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
$k_n(w) = \frac{\mathrm{II}_p(w)}{\mathrm{I}_p(w)} = \mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle = \langle L_p(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle = \langle \cos\theta L_p e_1 + \sin\theta L_p e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle =$
$= \langle \cos\theta k_1 e_1 + \sin\theta k_2 e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle = k\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$

Ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten είναι

$$L_p \sim \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix} \text{ ως προς τη βάση } \{e_1(p), e_2(p)\}$$

με $\det L_p = k_1(p) \cdot k_2(p)$ και $tr(L_p) = k_1(p) + k_2(p)$.

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ GAUSS – ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καμπυλότητα Gauss στο P είναι ίση $K(p) = \det(L_p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$ και μέση καμπυλότητα είναι ίση με: $H(p) = \frac{1}{2} tr(L_p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$

$K = k_1 \cdot k_2$, $H = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$ $\Big\}$ $k_1 \cdot k_2 = k$, $k_1 \cdot k_2 = 2H$ $\Big\}$ k_1, k_2 λύσεις του πολυωνύμου $t^2 - 2Ht + k$

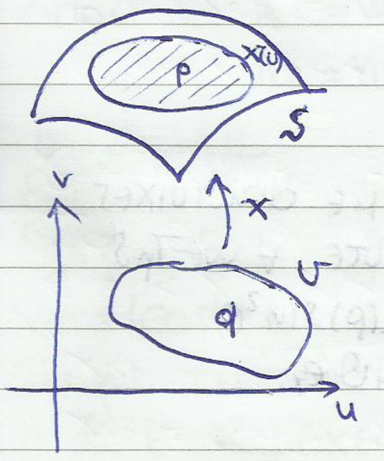
Απο τη διακρίνουσα $H^2 \geq k$

$H^2 = k \iff k_1 = k_2$

και

$H^2 > k \iff k_1 = H \pm \sqrt{H^2 - k}$ & $k_2 = H - \sqrt{H^2 - k}$

Υπολογισμός Καμπυλότητας Gauss και μέσης Καμπυλότητας



$X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$

$p = X(q)$

$\{X_u(q), X_v(q)\}$ βάση του T_pS

Θα βρούμε τον πίνακα της L_p ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$

$$\left.\begin{aligned} LX_u &= \alpha_{11} X_u + \alpha_{21} X_v \\ LX_v &= \alpha_{12} X_u + \alpha_{22} X_v \end{aligned}\right\}$$

Πίνακας της L: $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

Πολ/ζω εσωτερικώς με X_u, X_v ($1^{η}$ σχέση)

$$\begin{cases} E\alpha_{11} + \alpha_{21} F = e \\ F\alpha_{11} + \alpha_{21} G = f \end{cases} \quad (1)$$

Πολ/ζω εσωτερικώς με X_u, X_v

$$\begin{cases} E\alpha_{12} + F\alpha_{22} = f \\ F\alpha_{12} + G\alpha_{22} = g. \end{cases} \quad (2)$$

Η ① μπορεί να γραφεί:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$K \circ X(q) = \det A = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$$

όμοια:

$$H \circ X = tr(A) \Rightarrow H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

πχ

1) Στο επίπεδο $K = H = 0$

2) Στη σφαίρα $K = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$

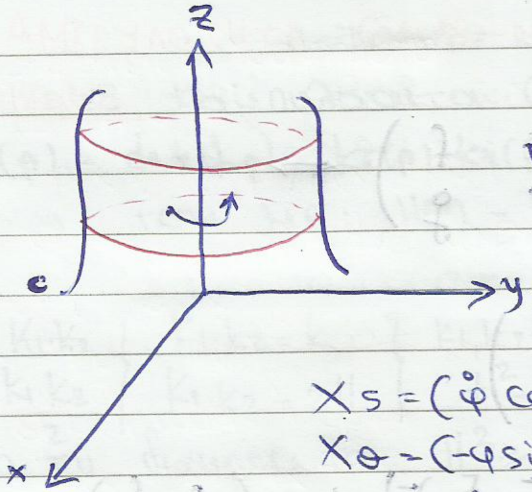
3) Κυλινδρος : $K = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$, $H = \frac{1}{2R}$

① Οι συναρτήσεις $K, H : S \to \mathbb{R}$ λείες.

② $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ και $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ συνεχείς

ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ:

Έστω $c(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$ καμπύλη του Oxz επιπέδου με $\varphi(s) > 0$ $\forall s \in I$, s = μήκος τόξου της c



$X: U \to \mathbb{R}^3$, $U = I \times \mathbb{R}$

παραμετρική επιφάνεια

$X(s,\theta) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\sin\theta, \psi(s))$

όπου

$X_s = (\dot\varphi\cos\theta, \dot\varphi\sin\theta, \dot\psi)$

$X_\theta = (-\varphi\sin\theta, \varphi\cos\theta, 0)$

$X_s \times X_\theta = (-\dot\psi\varphi\sin\theta, -\varphi\dot\psi\sin\theta, \varphi\dot\varphi)$

όπου $\|X_s \times X_\theta\| = \sqrt{\varphi^2(\dot\psi^2+\dot\varphi^2)} = \varphi\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2} \Rightarrow \varphi > 0$

κανονική παραμετρική επιφάνεια με μοναδιαίο κάθετο:

$N = (-\dot\psi\cos\theta, -\dot\psi\sin\theta, \dot\varphi)$

Τα θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης είναι:

$E = \|X_s\|^2 = \dot\varphi^2 + \dot\psi^2 = 1$

$F = \langle X_s, X_\theta\rangle = 0$ (δηλ. οι παραμετρικές καμπύλες τέμνονται κάθετα)

$G = \|X_\theta\|^2 = \varphi^2 > 0$

Τα θεμελιώδη ποσά 2ης τάξης είναι:

$e = \langle X_{ss}, N\rangle$, $f = \langle X_{s\theta}, N\rangle$, $g = \langle X_{\theta\theta}, N\rangle$

$X_{ss} = (\ddot\varphi\cos\theta, \ddot\varphi\sin\theta, \ddot\psi)$

$X_{s\theta} = (-\dot\varphi\sin\theta, \dot\varphi\cos\theta, 0)$

$X_{\theta\theta} = (-\varphi\cos\theta, -\varphi\sin\theta, 0)$

Έτσι,

$e = -\dot\psi\cdot\ddot\varphi + \dot\varphi\ddot\psi \Rightarrow \boxed{e = \dot\varphi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\varphi}$

$\boxed{f = 0}$ και $\boxed{g = \varphi\dot\psi}$

$\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 = 1 \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \dot\psi\ddot\psi = -\dot\varphi\ddot\varphi$

Η καμπυλότητα Gauss είναι

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = \dfrac{\varphi\dot\psi(\dot\varphi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\varphi)}{\varphi^2} \Rightarrow K = \dfrac{\dot\psi(\dot\varphi\ddot\psi - \dot\psi\ddot\varphi)}{\varphi} =$

$= \dfrac{\ddot\varphi(-\cancel{\dot\varphi^2 - \dot\psi^2})^{-1}}{\varphi} = -\dfrac{\ddot\varphi}{\varphi}$

$H = \ldots$ όμοια